

Szegedi Tudományegyetem  
Neveléstudományi Doktori Iskola

GÁL-SZABÓ ZSÓFIA

**FELSOROLÓ KOMBINATÍV FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK ÉRTÉKELÉSE  
A FELADATOK MEGÉRTÉSE ÉS A STRATÉGIAHASZNÁLAT ALAPJÁN  
ÁLTALÁNOS ISKOLÁSOK KÖRÉBEN**

**PhD értekezés tézisei**

**Témavezető: Korom Erzsébet**



Szeged, 2020

## AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJA

A doktori értekezés tárgya a kombinatív gondolkodás, ami alatt – a hazai elméleti megközelítésekkel összhangban (Csapó, 1988; Nagy, 2004) – egy meghatározott műveletekből álló elméleti konstruktumot értünk, ami a gondolkodási képesség egyik összetevője. Definiálására Adey és Csapó (2012) meghatározását használjuk, miszerint a kombinatív gondolkodás teszi lehetővé megadott elemekből meghatározott feltételek szerint rendezett összeállítások létrehozását. A kombinatív gondolkodás általunk használt értelmezése analógnak tekinthető a kombinatorikai problémák egyik kategóriájával, a felsoroló kombinatív problémákkal (l. Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997). Mivel a nemzetközi munkákban többféle értelmezésben és kontextusban használják a kombinatív gondolkodást, kutatásaink pontos körülhatárolása érdekében döntöttünk a dolgozat címében és szövegében a felsoroló kombinatív problémák kifejezés használata mellett. Ugyanis a vizsgálatainkhoz szorosan kapcsolódó munkákban (l. pl. English, 1991, 1993; Mwamwenda, 1999; Poddiakov, 2011) az adatfelvételekhez – a mérés mögötti elméleti kerettől függetlenül – ilyen típusú feladatokat használnak a kutatók.

A témában Piaget vizsgálatai óta – aki szerint a formális gondolkodás kialakulásában a kombinatív gondolkodás központi szerepet tölt be (l. pl. Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970) – számos elméleti és empirikus eredmény született. Azonban több kutatás (pl. Mashiah-Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Melusova & Vidermanova, 2015; Sztányi & Csikos, 2015) is felhívja a figyelmet a terület nehézségére és kihívásaira, aminek fényében érthető Lockwood (2015) megállapítása, miszerint sokat kell még megtudnunk a diákok kombinatív gondolkodásáról, feladatmegoldási folyamatairól. Hadar és Hadass (1981) a kombinatív problémák megoldása kapcsán több hibalehetőséget azonosított, melyek közül kiemeltük a feladat megfelelő értelmezését, valamint a szisztematikus megoldási rendszer hiányát. Ezzel összefüggésben az értekezés célja a felsoroló kombinatív problémák megértésére, valamint a felsorolási stratégiákra irányuló vizsgálatokkal hozzájárulni a kombinatív gondolkodással kapcsolatos ismeretek bővítéséhez, ezáltal a tanulók gondolkodásának, stratégiahasználatának alaposabb megértéséhez.

A disszertáció a bevezetést követően három elméleti háttérrel foglalkozó és öt, az empirikus kutatásokat bemutató fejezetből, valamint egy összegzésből áll. A dolgozat alapját három, korábban megjelent tanulmány szövege (Gál-Szabó, 2019; Gál-Szabó & Korom, 2018; Gál-Szabó, Korom & Steklács, 2019), valamint egy konferenciaelőadás (Szabó & Korom, 2017) adja. A disszertációban bemutatott kutatásokat az SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoport, az MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport, valamint az SZTE Neveléstudományi Doktori Iskola támogatta.

## A KUTATÁSI TÉMA ELMÉLETI KERETE

A kombinatorikára, kombinatív gondolkodásra irányuló munkák többsége matematikai kontextusban, a matematika tanításával összefüggésben foglalkozik a témával (pl. Csapó, Csíkos & Molnár, 2015; DeTemple & Webb, 2014; English, 2005, 2016; Lockwood, 2013). Emellett megjelenik egy másik, általános pedagógiai, pszichológiai irány is, ami a kombinatív gondolkodásra mint a gondolkodási képesség egyik összetevőjére tekint (pl. Csapó, 1988, 2001; Inhelder & Piaget, 1967; Nagy, 2004; Zentai, Hajduné Holló & Józsa, 2018). A dolgozatban bemutatott kutatás a második megközelítéshez sorolható. A kétféle kontextusból adódóan vannak fogalmi és szemléletbeli különbségek, azonban az egyik paradigma elméleti megállapításai, kutatási eredményei számos esetben relevánsak és felhasználhatók a másikban is. Ahogyan arra már utaltunk, a kombinatív gondolkodás az általunk használt értelmezésben (l. Adey & Csapó 2012) megfeleltethető a felsoroló kombinatív problémáknak (l. Batanero et al., 1997), így kutatásaink a matematikához köthető munkák rendszerébe is beilleszthetők.

A témához kapcsolódó empirikus munkák eredményeinek összehasonlíthatóságát nehezíti, hogy a mérésekhez használt feladatok különbözőek. A feladattípusok azonosításában segíthet a Batanero és munkatársainak (1997) által leírt felosztás, ami a kombinatorikai problémák négy kategóriáját különbözteti meg: létező, számolási, optimalizálási és felsoroló problémák. Saját kutatásunk szempontjából a felsoroló problémákhoz kapcsolódó feladatokra irányuló vizsgálatok érdemelnek kiemelt figyelmet, illetve a stratégiahasználat elemzése szempontjából néhány számolási problémával foglalkozó kutatás eredményei is relevánsak. Az említett két területre irányuló nemzetközi, empirikus munkák egyetlen (pl. Bräuning, 2019; English, 1991, 1993; Palmér & van Bommel, 2018; Tillema, 2013) vagy néhány (pl. Höveler, 2018; Shin & Steffe, 2009) kombinatív művelethez kapcsolódó feladat, feladatok megoldását értékelik. A kombinatív gondolkodás rendszerként való vizsgálata kapcsán hazai (pl. Csapó, 2001, Csapó & Pásztor, 2015, Nagy, 2004), illetve hazai vonatkozású (pl. Wu & Molnár, 2018) kutatásokról tudunk. Utóbbiak közül a disszertációban bemutatott kutatások a Csapó-féle elméleti modellen alapulnak (Csapó, 1988), mely értelmében a képességet nyolc kombinatív művelet modellezi: Descartes-féle szorzatok, ismétléses variációk, ismétlés nélküli variációk, összes ismétléses variáció, ismétléses kombinációk, összes részhalmaz, ismétlés nélküli kombinációk, ismétléses permutációk.

Felsoroló kombinatív feladatok értékelése során többek között elemezhetjük a létrehozott megoldásokat, azaz a feladaton nyújtott teljesítményt, valamint a feladatmegoldás folyamatát, azt, hogy a feladatmegoldó hogyan, milyen struktúra vagy stratégia alapján sorolta föl az összeállításokat (Csapó, 2003 nyomán). Az eddigi hazai kutatások (l. pl. Csapó, 1988, 2001, 2003; Csapó & Pásztor, 2015; Hajduné Holló, 2004; Nagy, 2004; Pap-Szigeti, 2009; Szabó, Korom & Pásztor, 2015) a két tényező közül az első vizsgálatára irányultak. A megoldások felsorolási módjának elemzése kapcsán pedig csak nemzetközi kutatásokról tudunk (l. pl. Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970; English, 1991; 1993; Halani, 2012; Scardamalia, 1977). A következő bekezdésekben az említett két értékelési dimenzióhoz kapcsolódó kutatási előzményeket ismertetjük.

A felsoroló kombinatív problémákat tartalmazó mérőeszközök feladataiban közös, hogy megadott elemekből, a feladat által kért feltételek szerint kell felsorolni az összes lehetséges, egymástól különböző összeállítást. A válaszok kiértékelése során a legegyszerűbb, mindössze néhány különböző összeállítást kérő feladatoknál még kellően informatív lehet a hibás/hibátlan értékelési mód, ám ennél összetettebb esetekben belátható, hogy az említett dichotóm pontozás

mellett nagy az információveszteség, így ennél finomabb pontozási skálára van szükség. A következőkben a felvázolt értékelési kihívásra ismertetünk három megoldást. A Csapó-féle modellen alapuló kutatások (pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Szabó, Korom, & Pásztor, 2015) jellemzően az általa javasolt j-index (Csapó, 1988) mentén értékelik a válaszokat. A mutató a válaszban szereplő helyes (a feladat feltételeinek megfelelő), valamint a helytelen (a feladat feltételeinek nem megfelelő) és felesleges (helyes, de már szereplő) konstrukciók számát viszonyítja az összes lehetséges összeállítás darabszámához. A j-index jól jellemzi a teljesítményt, azonban diagnosztikus értékelési szándék esetén kevésbé informatív. Nagy (2004) az elemi kombinatív képesség kapcsán négy szempont szerinti értékelést javasol. Az első szempontnál a hibátlan és a hibás megoldást különbözteti meg, míg a további három szempont a hibaelemzést teszi lehetővé, és a hibák jellegéről (tartalmi, mennyiségi) és mértékéről ad információt. Zentai és munkatársai (2018), Nagy modelljére épülő munkájukban, a válaszok másik, szintén négy szempont mentén történő értékelését javasolják fiatalabb korosztály esetében. A szempontok és az azoknak megfelelő megoldások a következők: van legalább egy helyes összeállítás; szerepel az összes lehetséges összeállítás; van legalább egy helyes összeállítás, és nincs kétszer vagy többször szereplő összeállítás; van legalább egy helyes összeállítás, és nincs hibás összeállítás. A két második értékelési módszert az elemi kombinatív képesség (egyszerűbb feladatok) diagnosztikus értékelésére javasolják a kutatók, azonban kérdésesnek tartjuk, hogy azok összetettebb feladatok esetében megfelelően differenciálják-e a válaszokat. A leírtak alapján azt látjuk, hogy összetettebb felsoroló kombinatív feladatok esetén további javaslatok szükségesek a diagnosztikus értékeléshez.

Felsoroló kombinatív feladatoknál az összeállítások felsorolásában megjelenő rendszert Scardamalia (1977) és English (1991) nyomán kombinatív stratégiának nevezzük. Piaget értelmi fejlődésről szóló elmélete értelmében a műveletek előtti, a konkrét műveleti és a formális műveleti szintet eltérő gondolkodási és feladatmegoldási stratégiák jellemzik (Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970). A műveletek előtti szakaszban lévők feladatmegoldására a véletlen próbálkozás jellemző, majd a konkrét műveleti szakaszban jelenik meg a rendszerben való gondolkodás, ami a formális műveleti szakaszban teljeseedik ki. Piaget vizsgálataival összhangban English (1991, 1993) Descartes-féle szorzatok művelet típus esetében a véletlen elemválasztástól a szisztematikus mintázatú elemválasztásig hat, egyre kifinomultabb stratégiát azonosított (véletlen választás, próbálgatás, megjelenő mintázat, teljes ciklikus mintázat, odométer mintázat, teljes odométer mintázat). A legfejlettebb, „odométer” stratégiákat használók az egyik elem fixen tartása mellett szisztematikusan megkeresik a hozzá tartozó összes lehetőséget, majd ezt ismétlik. English szerint nem csak az általa legfejlettebbnek tartott teljes odométer stratégia vezet a tökéletes megoldáshoz, azonban ezt tartja a leghatékonyabb megoldási útnak. Halani (2012) és Lockwood (2013) más művelet típusok (ismétlés nélküli permutációk, ismétléses variációk) esetében foglalkoztak a megoldási utak hatékonyságával, és arra a következtetésre jutottak, hogy a vizsgált kombinatív műveletek esetében több hatékony megoldási út létezik, amelyekben a szisztematikus felsoroláson alapuló algoritmus jelenléte a közös.

A stratégiahasználattal kapcsolatos empirikus adatok azt mutatják, hogy a tanulók az életkor előrehaladtával jellemzően egyre kifinomultabb stratégiákat használnak (English 1991, 1993). Emellett nem állandó egy-egy tanuló stratégiahasználata, hanem változik egy feladatsor megoldásakor, hogy milyen rendszer alapján sorolja föl az összeállításokat (English 1991,

1993). Továbbá elképzelhető, hogy az alacsonyabb teljesítményekhez inkább a kezdetlegesebb, míg a magasabb teljesítményekhez a hatékonyabb stratégiák tartoznak (Csapó & Pásztor 2015).

A kombinatívstratégia-használat kapcsán a korábbi, kisebb mintán történő feltáró vizsgálatok (pl. English 1991, 1993; Halani, 2012; Palmér & van Bommel, 2018) módszerei, a vizsgált feladatok száma, köre és a minta nagysága is kibővíthető a technológiaalapú értékelés révén (pl. eDia, l. Molnár & Csapó, 2019). A kombinatív stratégiák nagymintás elemzéséhez rendelkezésünk áll egy algoritmusalapú osztályozási módszer (Gál-Szabó & Bede-Fazekas, 2020). A Descartes-féle szorzatok műveletre készült feladatoknál használható eljárás a felsorolásban megjelenő mintázat két jellemzője – odometrikusság és ciklikusság – alapján határoz meg hét stratégiakategóriát (véletlenszerű, kissé ciklikus, kissé odometrikus, közel ciklikus, közel odometrikus, teljesen ciklikus és teljesen odometrikus stratégia).

## A KUTATÁSI PROGRAM

Kutatásunk célja a kombinatív gondolkodással kapcsolatos ismeretek bővítése, a konstruktum alaposabb megismerése a feladatok megértését és a stratégiahasználatot illetően a képesség technológiaalapú mérése révén. Ezzel összhangban vizsgálataink két területre koncentrálnak: (1) a feladatok (adott kombinatív műveletek) feltételeinek megértésére, valamint (2) a feladatmegoldás során a konstrukciók felsorolásának módjára, a felsorolási stratégiákra. Az előbbieket alapján kutatási programunkban az alábbi kutatási célokat fogalmaztuk meg:

- (1) Online mérőeszköz fejlesztése – a Csapó-féle digitalizált kombinatív teszt (Csapó & Pásztor, 2015) átdolgozása és kiegészítése –, valamint kipróbálása.
- (2) Változók kidolgozása, amelyek alkalmasak a feladatok feltételeinek megértésének vizsgálatára, valamint ezen változók alakulásának, teljesítménnyel való összefüggésének és előrejelző szerepének feltárása 4. és 6. évfolyamosok körében.
- (3) A stratégiahasználat vizsgálatának kidolgozása Descartes-féle szorzatok műveletre, valamint a kombinatívstratégia-használat feltárása és a teljesítménnyel való összefüggésének elemzése 4. és 6. évfolyamosok körében.

A célkitűzések megvalósítására három adatfelvételt végeztünk, melyek kapcsán négy vizsgálat kerül a dolgozatban bemutatásra (1. táblázat). A táblázat időrendben mutatja az adatfelvételeket, azonban a vizsgálatok ismertetésénél a célkitűzések logikáját követjük.

1. táblázat A kutatási program vizsgálatai időrendben

Vizsgálat	Célok	Mérőeszköz	Évf.	N (fő)	Adatfelvétel
Szemmozgás-vizsgálat	stratégiahasználat vizsgálatának előkészítése	Csapó-féle kombinatív teszt DSZ feladata	3.	48/30	2016. 11.
Mérőeszköz-fejlesztés	mérőeszköz kidolgozása és kipróbálása	nyolc kombinatív feladat	4. 6.	118 121	2017. 06.
Feladatok megértése	feladatok megértésének vizsgálata	nyolc kombinatív feladat	4. 6.	482 482	2017. 12– 2018. 01.
Stratégia-használat	stratégiahasználat feltárása DSZ feladatoknál	három releváns feladat a tesztből			

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle szorzatok

## A VIZSGÁLATOK CÉLJAI ÉS HIPOTÉZISEI

### Mérőeszköz-fejlesztés

A vizsgálat célja (1) a kombinatív gondolkodás vizsgálatára alkalmas, számítógépalapú mérőeszköz kidolgozása, valamint (2) annak kipróbálása 4. és 6. évfolyamosok körében.

A mérőeszköz-fejlesztés során a Csapó-féle kombinatív teszt online változatát (Csapó & Pásztor, 2015) alapul véve a célunk egy feladatkontextus tekintetében változatos, a feladatok jellege, elrendezése, és az instrukciók felépítése szempontjából egységes mérőeszköz létrehozása volt, ami a Descartes-féle szorzatok műveletre – a tervezett stratégiahasználat vizsgálata érdekében – több, eltérő bonyolultságú feladatot tartalmaz.

A mérőeszköz kipróbálása kapcsán hipotéziseink a következők voltak (Csapó & Pásztor, 2015; Szabó, Korom & Pásztor, 2015, Szabó & Korom, 2016 alapján):

- H<sub>1</sub> A reliabilitás-mutatók (Cronbach- $\alpha$ ) alapján megfelelően működik a mérőeszköz teszt része mindkét évfolyamon.
- H<sub>2</sub> A mérőeszköz teszt része közepes nehézség körüli, és a 6. évfolyamosok számottevően jobban teljesítenek a teszten, mint a 4. évfolyamosok.
- H<sub>3</sub> A teszt feladatai változatos nehézségűek, melyek közül a Descartes-féle szorzatok művelethez kapcsolódó feladatok a könnyebb tartományba esnek.

### Feladatok megértésének vizsgálata

A vizsgálat célja (1) a feladatok (adott kombinatív művelet) feltételeinek megértését elemző változók kidolgozása, valamint (2) ezen változók alakulásának, teljesítménnyel való összefüggésének és előrejelző szerepének vizsgálata 4. és 6. évfolyamosok körében.

A kritériumváltozók kidolgozása és értékelése, valamint az elemzésbe bevont adatok alapján a következő hipotéziseket fogalmaztuk meg:

- H<sub>1</sub> Meghatározhatók olyan kritériumok (változók), amelyek mentén vizsgálható a feladat (művelet) feltételeinek megértése, és ezen kritériumok egyértelműen leírhatók a feladatok esetében.
- H<sub>2</sub> A definiált kritériumváltozók mentén kiértékelhetők a tanulói válaszok a használt online mérőeszköz esetében.
- H<sub>3</sub> A kritériumoknak megfelelő válaszok feladatonkénti aránya és a feladatok nehézségi sorrendje (j-index szerint meghatározott teljesítmény alapján) között van összefüggés.
- H<sub>4</sub> A kritériumváltozók alakulása hasonló tendenciákat mutat a két évfolyamon, az idősebbek esetében magasabb megfelelési arányokkal.
- H<sub>5</sub> A több kritériumnak megfelelő válaszokhoz jobb feladat- és tesztteljesítmény tartozik.
- H<sub>6</sub> A kritériumoknak megfelelő válaszok aránya és a változók magyarázó ereje eltérően alakul az egyes műveletekhez kötődő feladatoknál.
- H<sub>7</sub> A kritériumváltozók magyarázó ereje szempontjából hasonló tendenciák mutatkoznak a két évfolyamon, közel azonos varianciaértékekkel.

## Szemmozgásvizsgálat

A kutatás célkitűzése a kombinatívstratégia-használatra irányuló későbbi vizsgálataink megalapozása érdekében a téma apróbb részletekre kiterjedő, előkészítő feltárása. Célunk volt (1) a kombinatívstratégia-használat azonosítása, (2) a válaszadási mintázat (ábrák kitöltésének rendszere) feltárása, valamint (3) a megoldások áttekintése és az egyes területekre eső fixációk alapján a válaszadás hatékonyságának vizsgálata 3. évfolyamosok körében.

A szakirodalmi előzmények (Csapó & Pásztor 2015; English, 1991, 1993) és az előzetes tapasztalataink alapján a következő hipotéziseket fogalmaztuk meg:

- H<sub>1</sub> Változatos stratégiahasználat jellemzi a vizsgálatban résztvevőket.
- H<sub>2</sub> Változatos válaszadási mintázatok tapasztalhatók az ábrák kitöltése (megoldások létrehozása) során.
- H<sub>3</sub> A fejlettebb stratégiák jobb megoldást eredményeznek, és a jobban teljesítők esetében jellemzőbb valamilyen következetes rendszer az összeállítások felsorolásában.
- H<sub>4</sub> A megoldások alaposabb áttekintése és a válaszadó területen több fixáció jellemzi a jobb teljesítményt kezdetlegesebb stratégiával elérőket.
- H<sub>5</sub> Kevesebb áttekintés és a válaszadó területen kevesebb fixáció jellemzi a jobb teljesítményt fejlettebb stratégiával elérőket.
- H<sub>6</sub> Kevesebb áttekintés és a válaszadó területen kevesebb fixáció tapasztalható a leggyengébben teljesítők esetében.

## Stratégiahasználat vizsgálata

A vizsgálat célja egyrészt (1) kidolgozni a rögzített adatok megfelelő formára hozásának technikáját annak érdekében, hogy a stratégiahasználat a Gál-Szabó és Bede-Fazekas (2020) által javasolt módszerrel elemezhető legyen. Másrészt az említett kategorizálási algoritmus alapján feltárni (2) a kombinatívstratégia-használatot, (3) a stratégia és a teljesítmény összefüggését, valamint (4) a stratégiahasználat változását három Descartes-féle szorzatok művelethez kapcsolódó felsoroló kombinatív feladat esetében 4. és 6. évfolyamosok körében.

A szakirodalmi előzmények (Csapó & Pásztor, 2015; English, 1991, 1993), valamint a szemmozgásvizsgálat eredményei alapján a következőket feltételeztük:

- H<sub>1</sub> Változatos stratégiahasználat jellemzi a két részminta tanulóit.
- H<sub>2</sub> Az idősebb korosztály összetettebb (hatékonyabb) stratégiákkal oldja meg a feladatokat, mint a fiatalabb.
- H<sub>3</sub> A teljesítmény és a stratégiahasználat összefügg egymással, az alacsonyabb teljesítményekhez gyakrabban társul kezdetlegesebb, a magasabb teljesítményekhez hatékonyabb stratégia.
- H<sub>4</sub> A leghatékonyabb, teljesen odometrikus stratégiához javarészt tökéletes vagy tökéleteshez közeli megoldások tartoznak.
- H<sub>5</sub> A tökéletes megoldásoknál nagyobb arányban fordulnak elő a hatékonyabb stratégiák, de a legkezdetlegesebb, véletlenszerű stratégia mellett is előfordul hibátlan megoldás.
- H<sub>6</sub> A tesztben előre haladva a stratégiahasználat alakulásának mindhárom formája előfordul, azaz egyaránt tapasztalható visszaesés, változatlanúság és fejlődés a stratégiahasználatban.

## A VIZSGÁLATOK MÓDSZEREI

A kutatási program mindhárom adatfelvételéhez az eDia online mérés-értékelési rendszert (Molnár & Csapó, 2019) használtuk, ami a számítógépes adatfelvétel mellett az eredmények automatikus kiértékelését és adatbázisba rendezését is lehetővé teszi. A szemmozgásvizsgálatnál egyéni, a másik két esetben csoportos, tanórai keretek között megvalósított adatfelvételt alkalmaztunk. A tanulók teljesítményét a Csapó-féle (1988) j-index segítségével jellemeztük. Az adatelemzésekhez a klasszikus tesztelmélet eszköztárát használtuk, az elemzéseket az IBM SPSS Statistics 24 programban végeztük.

### Mérőeszköz-fejlesztés

#### *Minta*

A mérőeszköz kipróbálásában személyes megkeresés keretében kértünk segítséget az MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoporttal kapcsolatban álló pedagógusoktól. Ennek eredményeképpen a mérőeszközt két nagyvárosi általános iskola 4. (N=118) és 6. évfolyamos (N=121) tanulói körében teszteltük. Az alsóbb évfolyamból kettő, illetve három, az idősebb korosztályból kettő-kettő osztály vett részt az adatfelvételben.

#### *Mérőeszköz*

A dolgozatban bemutatott kutatási program szempontjából a kidolgozott mérőeszköz teszt része érdekes, ezért a továbbiakban ezzel foglalkozunk (a teljes mérőeszköz a disszertációból megismerhető). A nyolc feladatból álló teszt a Csapó (2001) által kifejlesztett kombinatív teszt digitalizált változatának (Csapó & Pásztor, 2015) átdolgozása és kiegészítése. Az eredeti mérőeszközben szereplő hat képi feladat struktúráján (művelet típusa, elemkészlet elemeinek száma, összeállítások hossza) és a tesztben elfoglalt sorrendjén nem változtattuk. Ez alapján az online mérőeszköz teszt része a következő hat kombinatív műveletre tartalmaz feladatokat (zárójelben a feladat sorszáma szerepel): Descartes-féle szorzatok (1–3.), összes részhalmaz (4.), összes ismétléses variáció (5.), ismétlés nélküli variációk (6.), ismétléses variációk (7.), ismétlés nélküli kombinációk (8.).

Az átdolgozás során három feladatnál (saját tesztünk 3., 4. és 8. feladatai) megtartottuk az eredeti feladat kontextusát, míg három esetében (saját tesztünk 5., 6. és 7. feladatai) saját fejlesztésű feladatot használtunk. Az eredeti hat feladat elé beillesztettünk két új feladatot, melyek a tesztben már szereplő Descartes-féle szorzatok művelet értékelését teszik lehetővé kevésbé összetett esetekben (kisebb elemkészlet). A nyolc feladat egységes grafikát kapott, továbbá a feladatok jellege, elrendezése és az instrukciók felépítése azonos lett. A feladatok megoldása során az elemkészlet elemeinek (színes rajzok) vonszolásával (drag-and-drop technika) tudja a tanuló létrehozni a válaszadó terület rajzain az összeállításokat.



## **Feladatok megértésének vizsgálata**

### *Minta*

A kutatásban való részvételre az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport által, egy OTKA kutatás (Molnár, 2017) keretein belül megvalósított felméréssorozatban részt vevő iskolákat kértük fel, akik önként jelentkeztek a kutatásba. Ennek eredményeképpen a vizsgálatban 35 iskola vett részt az ország különböző részeiről. A 4. évfolyamon 44 osztály (N=790), a 6. évfolyamon 41 osztály (N=751) tanulóinak adatai állnak rendelkezésünkre. Azonban a disszertációban bemutatott elemzéseket nem a teljes, hanem egy szűkített mintán végeztünk (N<sub>4. évf.</sub>=482, N<sub>6. évf.</sub>=482; a két részminta elemszámának egyezése nem szándékos).

### *Mérőeszköz*

Az adatfelvétel a mérőeszköz-fejlesztés során létrejött mérőeszközzel történt, melynek nyolc kombinatív feladatot tartalmazó része – minimális, a tesztelés szempontjából lényegtelen változtatást leszámítva – azonos az említett vizsgálatnál használt teszttel.

## **Szemmozgásvizsgálat**

A szemmozgásvizsgáló műszer használata lehetővé teszi a számítógépes adatfelvétel során a feladatmegoldó tevékenység (mikor, mit csinált a feladatmegoldó) és a szem mozgásának videófelvételen való rögzítését, valamint a szem mozgásával összefüggő tényezők számszerűsítését (összes fixációs idő, fixációk száma, visszatérések száma). Így az adatelemzésbe a videóelemzésből származó és a műszer által mért számszerű adatok is bevonhatók.

### *Minta*

A vizsgálatban egy vidéki város általános iskolájának két 3. évfolyamos osztálya vett részt, összesen 48 tanulóval. Az adatelemzést azonban a videóelemzés és a szemmozgásműszer által mért számszerű adatok esetén nem ugyanolyan elemszámú mintán történt. Az első esetben lehetőség volt a teljes minta (N=48) bevonására, míg a második esetben technikai okok miatt ki kellett zárni a tanulók egy részét (szűkített minta, N=30).

### *Mérőeszköz*

A vizsgálatához a Csapó-féle kombinatív teszt online változatának (Csapó & Pásztor, 2015) egyetlen képi feladatát használtuk, mely a Descartes-féle szorzatok művelettípus értékelését teszi lehetővé. A feladat instrukciója alapján a tanulóknak egy fiút kell felöltöztetni a megadott elemkészletből (3-féle nadrág és 4-féle póló) az összes lehetséges, egymástól különböző módon.

## **Stratégiahasználat vizsgálata**

### *Minta*

Az elemzéseket a feladatok megértésének vizsgálatánál ismertetett két részminta tanulóinak eredményeivel végeztük, a 4. és a 6. évfolyamon egyaránt 482 tanuló adatai álltak rendelkezésünkre.

### *Mérőeszköz*

Az elemzéseket az adatfelvételhez használt, korábban már bemutatott mérőeszköz teszt részének első három, Descartes-féle szorzatok művelethez kapcsolódó feladatán végeztük.

## A KUTATÁSI PROGRAM EREDMÉNYEI

### Mérőeszköz-fejlesztés

(1) A kidolgozott mérőeszköz teszt része megfelelően működött mindkét részmintában (4. évfolyam Cronbach- $\alpha$ =0,79; 6. évfolyam Cronbach- $\alpha$ =0,74), a nyolc feladat bármelyikének kihagyásával csökkenne a megbízhatóság ( $H_1$ ). Az elkülönítésmutatók értékei alapján (4. évfolyam: 0,47–0,79; 6. évfolyam: 0,46–0,79) mindegyik feladat jól illeszkedik a tesztbe ( $p<0,01$ ). Így tehát alkalmasnak tartjuk a teszt használatát a további kutatásokhoz.

(2) A teszten a 4. évfolyamos tanulók átlagosan 70,08%p-os (szórás=18,26), a 6. évfolyamosok pedig 76,53%p-os (szórás=14,30) teljesítményt értek el. A mérés alapján hipotézisünk ( $H_2$ ) első része nem igazolódott, a teszt könnyebb, mint közepes nehézségű a vizsgált részmintákon, azonban elvárásunknak megfelelően az idősebb korosztály számottevően ( $p<0,01$ ) jobban teljesített a fiatalabbnál.

(3) A teszt egyes feladatain nyújtott átlagteljesítmények 4. évfolyamon 47,19%p és 87,32%p, 6. évfolyamon 57,38%p és 94,70%p között alakultak, ami megfelel azon várakozásunknak, miszerint a feladatok változatos nehézségűek lesznek a vizsgálatba bevont tanulók számára ( $H_3$  első része). Emellett, ahogy arra számítottunk, a Descartes-féle szorzatok feladatok mindkét korosztály esetében a könnyebbek közé tartoznak ( $H_3$  második része), a nehézségi sorrend alapján a 2. és a 3. feladat volt a legkönnyebb, amit – 4. évfolyamon kettő, 6. évfolyamon egy másik feladat mellett – az 1. feladat követ.

### Feladatok megértésének vizsgálata

(1) A kombinatív műveletek jellegéből kiindulva három szempontot (változót) határoztunk meg a feladatok feltételeinek megértésének vizsgálatához. Ezek a változók a konstrukció hosszára vonatkozó elemszám, az ismétlődő elemek előfordulását mutató ismétlődés, valamint a kiválasztás sorrendjével összefüggő felcserélhetőség. Mindhárom feltételhez meghatározhatók olyan általános érvényű kritériumok, amelyek alapján eldönthető, hogy egy megoldás megfelel-e az adott kritériumnak vagy sem ( $H_1$ ).

(2) Az általános kritériumok alapján az adatfelvételhez használt mérőeszköz feladataira specifikáltuk a változók kritériumait, és kidolgoztuk a rögzített válaszok alapján a változók értékeit feladatonként automatikusan kiértékelő kódokat ( $H_2$ ). A három Descartes-féle szorzatok művelethez kapcsolódó feladatnál, a feladatok jellegéből adódóan csupán az elemszám változót vizsgáltuk. A 4. (összes részhalmaz) és a 8. (ismétlés nélküli kombinációk) feladatoknál pedig a válasZRögzítési mód miatt a felcserélhetőség változó értéke nem számolható. Az előbbieket alapján tehát az elemszám kritériumát nyolc, az ismétlődését öt, a felcserélhetőségét három feladatnál elemeztük.

(3) A páros t-próbák alapján a 4. évfolyamosok esetében az első három feladat volt a legkönnyebb (75,92; 76,04; 76,83%p), ezek nehézsége azonos ( $p>0,05$ ), ezt követi a 7. (65,15%p), a 6. (59,31%p) és az 5. feladat (51,99%p), végül a legnehezebbnek a 4. (37,57%p) és a 8. feladat (35,50%p) bizonyult. Ettől minimálisan tér el a 6. évfolyamon a nehézségi sorrend, itt a 2. és a 3. feladat (85,09 és 85,53%p) volt a legkönnyebb, ezt követi az 1. feladat (80,22%p) és innentől a sorrend azonos az alacsonyabb évfolyamnál leírttal (75,04; 67,42; 59,38; 49,43; 47,30%p). Az egyes kritériumoknak megfelelő válaszok aránya a könnyebb tartományba eső öt feladatnál magasabb (jellemzően 80% feletti), mint a három legnehezebb feladatnál (jellemzően 75% alatti). Utóbbiak közül a 4. és az 5. feladatnál kiugróan alacsonyak

az értékek (40–60%). Az eredmények alapján tehát előzetes elvárásunknak megfelelően alakult a feladatok nehézségi sorrendje és a kritériumoknak való megfelelés ( $H_3$ ). Továbbá az idősebb korosztálynál magasabb megfelelési arányok mellett (6. évfolyamon kritériumonként 45–95%, míg 4. évfolyamon 40–90%) valóban hasonló feladatonként a kritériumoknak megfelelő válaszok aránya a két évfolyamon ( $H_4$ ).

(4) A nyolc feladatnál a vizsgált összes (1/2/3) kritériumnak megfelelő megoldásokat adó tanulók átlagteljesítménye 80–85%p körüli (kivéve a 8. feladatot, ahol 50–60%p ez az érték). Ezzel szemben az összesnél eggyel kevesebb kritériumnak megfelelő válaszokat adók részmintáiban jellemzően 40–50% körüli a feladatteljesítmény (néhány esetben előfordul ennél alacsonyabb és magasabb érték). Továbbá mindkét évfolyamon, mind a nyolc feladatnál a kritériumok számának emelkedésével számottevően ( $p < 0,01$ ) nő a teljesítmény. Az évfolyamonkénti feladatátlagoknál magasabb teljesítményt ( $p < 0,01$ ) értek el az összes feladat esetében azok a tanulók, akik minden kritériumnak megfelelő választ adtak, míg a többi részminta tanulói (4. évfolyamon a 2. feladatot kivéve) az átlagnál alacsonyabban teljesítettek ( $p < 0,01$ ). A teljes tesztet nézve hasonló tendenciát tapasztaltunk, miszerint a kritériumoknak való megfelelés növekedésével jellemzően a teljesítmény is nő ( $p < 0,01$ ) mindkét évfolyamon. Tehát a több kritériumnak megfelelő válaszokhoz valóban jobb feladat- és teszteljesítmények tartoznak ( $H_5$ ).

(5) A feladatokon nyújtott teljesítmények varianciáját az első három feladatnál – ahol egyedül az elemszám kritérium értékelhető – 5 és 30% körül magyarázzák a kritériumváltozók. A többi feladatnál, ahol legalább két kritériumváltozót vizsgáltunk, négy esetben 50% körül magyarázzák a változók a teljesítmény varianciáját, míg az 5. feladatnál a legmagasabb, 70% körüli a bevont kritériumváltozók által megmagyarázott variancia. Az egyes változók részesedése a hatásból feladatonként eltérően alakult (3–36%). Mindezek alapján a műveletek megértése mellett további tényezők is befolyásolják a teljesítményt, azonban egyértelmű a kritériumváltozók szerepe a teljesítmények alakulásában. Továbbá, ahogyan az vártuk, feladatonként van eltérés a kritériumok magyarázó erejében ( $H_6$ ), azonban a két évfolyamot hasonló tendenciák jellemzik ( $H_7$ ).

## **Szemmozgásvizsgálat**

(1) Az English (1991) által meghatározott stratégiákból kiindulva hat kategóriacsoporton belül 14 stratégiát azonosítottunk, melyek egy kivétellel megjelentek a vizsgált tanulók körében. Bár nem azonos arányban fordultak elő az egyes stratégiák, változatos stratégiahasználat jellemzi a vizsgálatban résztvevőket ( $H_1$  igazolódott).

(2) A videóelemzések azt mutatták, hogy a tökéletes megoldást nyújtók esetében valóban gyakoribb a következetesebb stratégiák használata, azonban kezdetleges stratégiák mellett is születtek 100%-os megoldások ( $H_2$  részben igazolódott).

(3) A megoldások megadása során (mintázat) az egyes szempontok mentén (oszlop/sor, jobbról/balról, fentről/lentről) eltérő változatosságot tapasztaltunk, azonban egy olyan szempont sem volt, ami szerint az összes tanuló ugyanolyan módon töltötte volna ki az ábrákat ( $H_3$  igazolódott).

(4) A tökéletes megoldást nyújtók közül a kezdetlegesebb stratégiákat használók alaposabban ellenőrzik a megoldásaikat a feladat végén, míg a fejlettebb stratégiákat használókra – vélhetően a következetes felsorolás miatt – kevésbé jellemző az alapos áttekintés. Ezzel összhangban a válaszadó területre jutó fixációk száma magasabb volt a jobb teljesítményt

kevésbé fejlett stratégiával elérő tanulók esetében, míg alacsonyabb a hasonló eredményhez párosuló hatékonyabb stratégiahasználat mellett ( $H_4$  és  $H_5$  igazolódott).

(5) A leggyengébben teljesítő tanulók a hatékony stratégiákat használókhoz hasonlóan kevesebbszer tekintették át a megoldásaikat, és kevesebbet fixáltak a válaszadó területre ( $H_6$  igazolódott). Vélhetően azért, mert esetükben nem cél az összes lehetséges megoldás megtalálása, és a „tetszés szerinti” ábrakitöltéshez nem volt szükségük alapos áttekintésre.

### **Stratégiahasználat vizsgálata**

(1) A stratégiahasználat vizsgálatára alkalmas adatbázis kialakításakor először az adatfelvétel alatt logfájlokban rögzített adatok segítségével rekonstruáltuk a stratégiahasználat vizsgálatához szükséges feladatmegoldói tevékenységeket (milyen sorrendben, milyen elemeket, hova húzott a vizsgálati személy). Majd az így kapott eseményeket tovább alakítottuk annak érdekében, hogy a használt stratégiaosztályozási algoritmusnak (Gál-Szabó & Bede-Fazekas, 2020) megfelelőek legyen.

(2) A vizsgált két korosztályban az alkalmazott stratégiaosztályozási módszer mind a hét kategóriája előfordul, azonban a válaszok többségére (80–90%) három stratégia, a legkezdetlegesebb véletlenszerű (20–30%), valamint a hatékonyabbak közé sorolható közel (15–20%) és teljesen odometrikus (35–40%) stratégia jellemző ( $H_1$  részben igazolódott).

(3) A két korosztály stratégiahasználatát összehasonlítva az első két feladatnál nem mutatkozik különbség ( $p>0,05$ ), míg a 3. feladatnál az idősebbek körében gyakoribbak ( $p<0,05$ ) a hatékonyabb stratégiák ( $H_2$  csak a 3. feladat esetében igazolódott).

(4) A stratégiahasználat és a teljesítmény előzetes elvárásunknak megfelelően mindhárom feladatnál, mindkét korosztályban összefügg ( $p<0,01$ ) egymással ( $H_3$  első része). A véletlenszerű stratégia mindegyik teljesítménycategóriánál előfordul, míg 60%p felett nő a három odometrikus stratégia aránya, 90%p-os teljesítmény felett pedig a legösszetettebb, teljesen odometrikus stratégia a leggyakoribb (ezen stratégia szinte kizárólag 90%p fölött fordul elő). A négy, elemzésekhez megfelelő elemszámmal rendelkező stratégia (véletlenszerű, kissé, közel és teljesen odometrikus) alapján létrehozott részminták szerint a kezdetlegesebb stratégiákhoz alacsonyabb, az összetettebb stratégiákhoz magasabb teljesítmények tartoznak ( $p<0,01$ ). A teljesítmény növekedésével tehát valóban gyakoribb a hatékonyabb stratégiák előfordulása ( $H_3$  második része). A két szélső stratégiát követő tanulók teljesítménye minden esetben számottevően ( $p<0,01$ ) különbözik egymástól. A véletlenszerű stratégiát követőket átlagosan 55 és 65%p közötti, míg az összeállításokat teljesen odometrikus mintázat alapján felsoroló tanulókat 85 és 95%p közötti teljesítmény jellemzi.

(5) A legösszetettebb, teljes odometrikus stratégia néhány esetet leszámítva szinte kizárólag tökéletes vagy tökéleteshez közeli megoldást eredményez ( $H_4$ ). Ezzel szemben a legkezdetlegesebb, véletlenszerű stratégia mellett a 90%p fölötti megoldások aránya jóval kisebb (bár ez sem elhanyagolható, 20–40%).

(6) A tökéletes megoldást produkáló tanulók körében mindhárom feladaton, mindkét korosztályban a leghatékonyabb, tökéletes odometria stratégia fordul elő leggyakrabban (50% feletti arány), amit a közel odometrikus stratégia szerinti feladatmegoldások követnek (20–25%), végül a legkezdetlegesebb, véletlenszerű stratégiahasználat is előfordul a részmintákban (10–15%). A hibátlan megoldásokat a tanulók tehát valóban gyakrabban hozzák létre hatékonyabb stratégiákkal, azonban a legkezdetlegesebb, véletlenszerű stratégia használata is eredményezhet tökéletes megoldást ( $H_5$ ).

(7) A három feladat megoldásához használt stratégiák mindkét korosztályban összefüggést ( $p < 0,01$ ) mutatnak egymással. Feladatpáronként (1 és 2., illetve 2 és 3. feladat) leggyakrabban az azonos stratégia jellemző (40–50%), amit a kevésbé összetett (30% körül), végül az összetettebb (25% körül) stratégia szerinti feladatmegoldások követnek. A tesztben előre haladva tehát a stratégiahasználat alakulásának mindhárom formája megjelenik ( $H_6$ ).

(8) A stratégiahasználatot a három feladatra összesítve nézve a tanulók mindegy 60%-a adta meg a válaszait legalább két feladatnál azonos stratégia mentén, míg a tanulók körülbelül egynegyedénél azonosítottuk mindhárom feladatnál ugyanazt a stratégiát. Utóbbiak közül legnagyobb arányban (mintegy 60%) a teljesen odometrikus stratégiát használók vannak, akiket az összeállításokat véletlenszerű mintázat alapján megadók követnek (35 és 25%).

## A KUTATÁSI PROGRAM RELEVÁNCIÁJA

A disszertációban bemutatott kutatási program keretében felsoroló kombinatív problémák vizsgálata kapcsán három átfogó célt fogalmaztunk meg – mérőeszközfejlesztés, feladatok megértésének vizsgálata, stratégiahasználat feltárása –, melyek kapcsán négy vizsgálatot ismertettünk. A következő bekezdésekben áttekintjük, hogy a disszertációban szereplő eredményeink mivel gazdagítják a kombinatív gondolkodásra vonatkozó pedagógiai, neveléstudományi kutatásokat.

A kidolgozott mérőeszközzel bővült a kombinatív gondolkodás vizsgálatára alkalmas online mérőeszközök köre. A mérőeszköz előnyének tartjuk, hogy az alkalmazott feladatok jellegüket tekintve teljesen egységesek, míg a feladatok kerettörténetei, melyek az adott művelet feltételeihez illeszkednek, feladatonként változnak. A mérőeszköz teszt része alkalmas a teljesítménymérésre, viszont a feladatok megoldásának részletesebb megadására jelen formájában csak kutatói segítséggel használható. Ha az automatikusan kiszámolásra kerülő kritériumváltozók beépítésre kerülnének az eDia rendszerben a teszt kitöltést követően a pedagógusok számára elérhető visszajelentésben szereplő adatok közé, úgy osztálytermi környezetben is jól alkalmazható lenne a teszt a felsoroló kombinatív feladatok megoldásának diagnosztikus értékelésére.

Kidolgoztunk egy további módszert a felsoroló kombinatív feladatokra adott válaszok értékelésére, amely részletes képet ad a feladatmegoldás során megjelenő hibákról. A definiált kritériumváltozókkal vizsgálható a feladatok megértése a kombinatív műveletek három feltétele, az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség mentén. Az értékelési eljárás kidolgozása során létrejöttek feladatonként azok a kódok, melyekkel a változók értékei automatikusan kiszámolhatók a tesztben szereplő (vagy azokkal azonos struktúrájú) feladatok esetében. Így technológiaalapú tesztelés esetén a változók értékei azonnal rendelkezésünkre állnak. A javasolt módszerrel a tanulói válaszok értékelésekor a feladatokon nyújtott teljesítmények mellett értékes információval tudunk szolgálni – nem tökéletes megoldás esetén – az elakadás egyik lehetséges dimenziójáról. Az így kapott információk a későbbiekben akár a gondolkodásfejlesztéshez is használhatóak, mivel általuk kimutatható, hogy mely tanulónak, mely feladat (művelet), melyik feltétele, feltételei okoztak nehézséget. A kritériumváltozók működésével kapcsolatos elemzéseink gyarapítják a kombinatív gondolkodással összefüggő tudásunkat 4. és 6. évfolyamosok esetében.

A stratégiahasználat elemezhetősége érdekében programozói segítséggel bekerültek az eDia online mérés-értékelési rendszerbe olyan eseménylekérdezési lehetőségek, amelyek

rekonstruálják a feladatmegoldás folyamatát. Ezen új opciók a kombinatív gondolkodás mérésére irányuló feladatok mellett más területek vizsgálatára irányuló mérőeszközöknél is értékes információkkal szolgálhatnak a kutatóknak.

Tudomásunk szerint hazánkban először vizsgáltuk a feladatmegoldási stratégiákat felsoroló kombinatív feladatok megoldása során. Továbbá nem tudunk olyan külföldi kutatásról, ami nagymintán, számítógépes adatfelvétellel, logfájlok alapján elemezte volna a kombinatív stratégiákat. A stratégiahasználattal kapcsolatos eredményeink bővítik a Descartes-féle szorzatok művelettípusra készült feladatok esetében a feladatmegoldási folyamat jellegzetességeinek megismerését 4. és 6. évfolyamosok körében.

## A TÉZISFÜZETBEN FELHASZNÁLT IRODALOM (SAJÁT PUBLIKÁCIÓK NÉLKÜL)

- Adey, P., & Csapó, B. (2012). A természettudományos gondolkodásfejlesztése és értékelése. In B. Csapó & G. Szabó (Eds.), *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–58). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Batanero, C., Godino J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 239–252). Amsterdam: IOS Press.
- Bräuning, K. (2019). Development of strategies for a combinatorial task by a 5 year old child. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11), Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. hal-02414857
- Csapó, B. (1988). *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Csapó, B. (2001). A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 101(4), 511–530.
- Csapó, B. (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Csapó, B., Csíkos, Cs., & Molnár, Gy. (2015, Eds.). *A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei*. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Csapó, B., & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség fejlődésének mérése online tesztekkel. In B. Csapó & A. Zsolnai (Eds.), *Online diagnosztikus mérések az iskola kezdő szakaszában* (pp. 367–386). Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- DeTemple, D., & Webb, W. (2014). *Combinatorial reasoning. An introduction to the art of counting*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451–474.
- English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273.
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer.
- English, L. D. (2016). Revealing and capitalising on young children's mathematical potential. *ZDM Mathematics Education*, 48(7), 1079–1087.
- Hadar, N., & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 435–443.
- Hajduné Holló, K. (2004). Az elemi kombinatív képesség fejlődésének kritériumorientált diagnosztikus feltárása 4–8 évesek körében. *Magyar Pedagógiai*, 104(3), 263–292.

- Halani, A. (2012). Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: the odometer category. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 59–68). Portland, Oregon: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Höveler, K. (2018). Children's Combinatorial Counting Strategies and their Relationship to Conventional Mathematical Counting Principles. In E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research. ICME-13 Monographs* (pp. 81–92). Springer International Publishing.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1967). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251–265.
- Lockwood, E. (2015). The Strategy of Solving Smaller, Similar Problems in the Context of Combinatorial Enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 339–362.
- Mashiach-Eizenberg M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15–36.
- Melusova, J., & Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary Students' Strategies for Solving Combinatorial Problems. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 197, 1703–1709.
- Molnár, Gy. (2017). Az interaktív problémamegoldó képesség fejlettségi szintjét befolyásoló képességek. In J. Kerülő, T. Jenei, & I. Gyarmati (Eds.), *Program és absztrakt kötet. XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia* (pp. 464). Nyíregyháza.
- Molnár, Gy., & Csapó, B. (2019). A diagnosztikus mérési rendszer technológiai keretei: Az eDia online platform. *Iskolakultúra*, 29(4–5), 16–32.
- Mwamwenda, T. S. (1999). Undergraduate and graduate students' combinatorial reasoning and formal operations. *Journal of Genetic Psychology*, 160(4), 503–505.
- Nagy, J. (2004). Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, 14(8), 3–20.
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2018). The role of and connection between systematization and representation when young children work on a combinatorial task. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 562–573.
- Pap-Szigeti, R. (2009). *Kritériumorientált képességfejlesztés tantárgyi tartalmakkal az 5. évfolyamon*. PhD értekezés, Szeged.
- Piaget, J. (1970). *Válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Poddiakov, A. (2011). Didactic objects for development of young children's combinatorial experimentation and causal-experimental thought. *International Journal of Early Years Education*, 19(1), 65–78.
- Scardamalia, M. (1977). Information Processing Capacity and the Problem of Horizontal "Décalage": A Demonstration Using Combinatorial Reasoning Tasks. *Child Development*, 48(1), 28–37.
- Shin, J., & Steffe, L. P. (2009). *Seventh-graders' use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorics problems*. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170–177). Atlanta, GA: Georgia State University.
- Szitányi, J., & Csikos, Cs. (2015). Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4225–4232). Hobart: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Tillema, E. S. (2013). A power meaning of multiplication: Three eighth graders' solutions of Cartesian product problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 331–352.
- Wu, H., & Molnár, G. (2018). Interactive problem solving: Assessment and relations to combinatorial and inductive reasoning. *Journal of Psychological and Educational Research*, 26(1), 90–105.
- Zentai, G., Hajduné Holló, K., & Józsa, K. (2018). Új mérőeszközök a gondolkodás vizsgálatára 4–8 éves korban. In O. Endrődy-Nagy & A. Fehérvári (Eds.), *HERA Évkönyv 2017: Innováció, kutatás, pedagógusok* (pp. 175–189). Budapest: Magyar Nevelés- és Oktatókutatók Egyesülete.

## AZ ÉRTEKEZÉSBEN HIVATKOZOTT SAJÁT KÖZLEMÉNYEK

- Gál-Szabó, Zs. (2019). Felsoroló kombinatív problémák megoldása során használt stratégiák mérésének előkészítése. *Neveléstudomány: Oktatás – Kutatás – Innováció*, 7(1) 31–46.
- Gál-Szabó, Zs., & Bede-Fazekas, Á. (2020). Formalization of Odometer Thinking and Indices for the Classification of Combinatorial Strategies. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), em0546.
- Gál-Szabó, Zs., & Korom, E. (2018a). A teljesítmények és a feladatmegoldásról alkotott tanulói vélemények összefüggése a kombinatív gondolkodás mérése kapcsán 4. és 6. évfolyamon. In T. Vidákovich & N. Füz (Eds.), *PÉK 2018. XVI. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program és összefoglalók* (p. 36). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
- Gál-Szabó, Zs., & Korom, E. (2018b). Combinatorial reasoning among 4th and 6th grade pupils: preliminary results of a large-scale study. In T. Vidákovich & N. Füz (Eds.), *PÉK 2018. XVI. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program és összefoglalók* (p. 37). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
- Gál-Szabó, Zs., & Korom, E. (2018c). Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján. *Magyar Pedagógia*, 118(4), 385–413.
- Gál-Szabó, Zs., & Korom, E. (2019). A kombinatív gondolkodás longitudinális vizsgálata: a teszten nyújtott teljesítmény és a feladatok megértésének változása 4–5. és 6–7. évfolyamok között. *Magyar Pedagógia*, 119(1), 3–18.
- Gál-Szabó, Zs., Korom, E., & Steklács, J. (2019). Feladatmegoldó viselkedés és kombinatív stratégiák felsoroló kombinatív probléma megoldása során. In J. Steklács (Ed.), *Szemkamerás vizsgálatok a pedagógiai kutatásban* (pp. 25–50). Kaposvár: Kaposvári Egyetem Pedagógiai Kar.
- Szabó, Zs. G. (2015). *A kombinatív képesség rövid távú fejleszthetőségének vizsgálata 3. évfolyamon*. Szakdolgozat. Szeged.
- Szabó, Zs. G., & Korom, E. (2016). A feladatmegoldási idő vizsgálata kombinatív képességet mérő teszten 3. évfolyamosok körében. In Gy. Molnár & E. Bús (Eds.), *PÉK 2016. XIV. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program – Előadás-összefoglalók* (pp. 149). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
- Szabó, Zs. G., & Korom, E. (2017). Kombinatív stratégiák feltárására fejlesztett mérőeszköz és kipróbálásának előzetes eredményei. In J. Kerülő, T. Jenei, & I. Gyarmati (Eds.), *XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia. Program és absztrakt kötet* (p. 510). Nyíregyháza: MTA Pedagógiai Tudományos Bizottság, Nyíregyházi Egyetem.
- Szabó, Zs. G., Korom, E., & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség rövid távú fejleszthetősége 3. évfolyamon természettudományos kontextusban. *Magyar Pedagógia*, 115(4), 383–401.